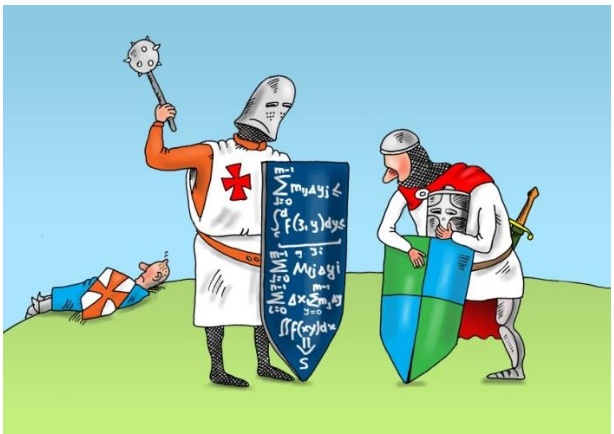
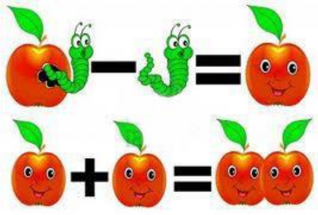
Mathematik – LK - Schiffelmann



Abi – Reader – 2019

5



Abgabetermin: Eine Din A 4-Seite (nicht 2): Fr, 17. Januar

1 Mo, 20. 1.	Exponentialfunktionen (Eigenschaften, Halbwertszeit, Verdopplungszeit, natürlicher Logarithmus)	12 Fr, 31. 1.	Orthogonalität, Schnittwinkel (Vektoren, Geraden, Ebenen)
2 Mo, 20. 1.	Grenzwerte, Symmetrie Alle Ableitungsregeln auf einen Blick	13	Spurpunkte und Spurgeraden
3 Di, 21. 1.	Kriterien für Extrem- und Wendestellen mit Beispielen	14	Schnitte zwischen Gerade und Ebene Schnitte zwischen 2 Ebenen
4 Di, 21. 1.	Vollständige Kurvendiskussion mit Kurvenschar (Beispiel Exponentialfunkt.)	15	Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen für Stichproben und Wahrscheinlichkeitsverteilungen
5 Mi, 22. 1.	Kurvenscharen: Ortskurven und gemeinsame Punkte	16	Aufgaben zur Binomialverteilung gesucht: $P(X \leq r), P(X \geq r), P(X = r)$ n gesucht, p gesucht, Sigmaregeln
6 Fr, 24. 1.	Wachstumsgeschwindigkeiten	17	Einseitiger Signifikanztest
7 Mo, 27. 1.	Flächen bestimmen zwischen x-Achse und einer Funktion, zwischen 2 Funktionen Unbegrenzte Integrale	18	Zweiseitiger Signifikanztest
8 Mo, 27. 1.	Rotationskörper, Mittelwerte von Funktionen	19	Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert, Standardabweichung
9 Mi, 29. 1.	Umrechnung zwischen Parameterform, Normalenform, Koordinatenform	20	Berechnungen zur Normalverteilung (mit und ohne Stetigkeitskorrektur)
10 Mi, 29. 1.	Abstandproblem (Punkt, Ebene)	21	Gaußverfahren
11 Fr, 31. 1.	Abstandproblem (Punkt, Gerade) Abstandproblem (Gerade, Gerade)	22	Stabile Verteilungen bestimmen

Exponentialfunktionen $: f(x) = b \cdot a^x$

Jac. Auner

1

Bsp. für Exponentialfunktionen:

$f(x) = 2^x$

$f(x) = -1{,}5 \cdot 0{,}8^x$

$f(x) = e^x$ → natürliche Exponentialfunktion

Bsp. für keine Exponentialfunktionen:

$f(x) = x^2$ → Potenzfunktion

$f(x) = x^{0{,}8}$ → Wurzelfunktion $= x^{0{,}8} = \sqrt[5]{x^4}$

$f(x) = (-2)^x$ → $x = 0{,}5$ nicht definiert $= a = -2 < 0$

Eigenschaften:

→ gehen immer durch den Punkt $(0|1)$ → $f(0) = a^0 = 1$

→ maximale Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$

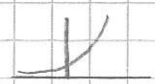
→ maximale Wertebereich ist $\mathbb{R}^+$ falls $b > 0$ und $\mathbb{R}^-$ falls $b < 0$

→ asymptotisch an die x-Achse / kein Schnittpunkt mit x Achse

→ genauer: → $a > 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ und $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

→ $0 < a < 1$: $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$ und $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$

→ stets monoton

→ genauer: → $a > 1$: f ist streng monoton steigend 

→ $0 < a < 1$: f ist streng monoton fallend 

Umkehrfunktion bei Exponentialfunktion = Logarithmusfunktion

$f(x) = a^x \qquad f^{-1}(x) = \log_a x$

Verdopplungszeit/Generationszeit:

Bsp.: $f(t) = 200 \cdot 1{,}05^t$ → exponentieller Wachstum $= a > 1$

$400 = 200 \cdot 1{,}05^t \quad | : 200$

$2 = 1{,}05^t$

$t = \log_{1{,}05}(2)$

$t = \frac{\log(2)}{\log(1{,}05)} = 14{,}20669$

Halbwertszeit:

Bsp.: $f(t) = 50 \cdot 0{,}8^t$ → exponentieller Zefall $= a < 1$

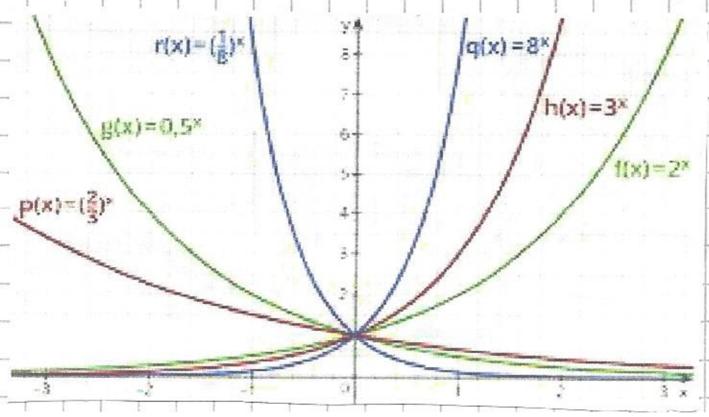
$25 = 50 \cdot 0{,}8^t$

$0{,}5 = 0{,}8^t$

$t = \log_{0{,}8}(0{,}5)$

$t = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}8)} = 3{,}10628$

⇒ Exponentialfunktionen beschreiben zeitliche exponentielle Wachstumsvorgänge



Lennard (3)

Kriterien für Extrem und Wendestellen

Donnerstag, 16. Januar 2020 19:07

	Hoch- und Tiefpunkte	Wendepunkte
	Eine Funktion hat an Stelle x einen HP oder TP, wenn...	Eine Funktion f hat an der Stelle x einen WP, wenn...
Kriterium mit dem VZW	1) $f'(x) = 0$ 2) $f'(x)$ einen VZW von + nach − hat (HP) oder $f'(x)$ einen VZW von − nach + hat (TP)	1) $f''(x) = 0$ 2) $f''(x)$ einen VZW von + nach − hat (WP mit größter Steigung) oder $f''(x)$ einen VZW von − nach + hat (WP mit kleinster Steigung)
	Eine Funktion hat an Stelle x einen HP oder TP, wenn...	Eine Funktion f hat an der Stelle x einen WP, wenn...
Kriterium mit höherer Ableitung	1) $f'(x) = 0$ 2) $f''(x) < 0$ (HP) oder $f''(x) > 0$ (TP)	1) $f''(x) = 0$ 2) $f'''(x) < 0$ (WP mit größter Steigung) oder $f'''(x) > 0$ (WP mit kleinster Steigung)

von Lennard Feuerbach

✓

Kurvendiskussion mit Kurvenschar

Lisa Fischer

Beispiel: $f_a(x) = e^{2x} \cdot (2a - x)$

$f_a'(x) = u(x) = 2a - x \qquad v(x) = e^{2x}$

$\qquad u'(x) = -1 \qquad v'(x) = 2e^{2x}$

PR : $u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$

$f_a'(x) = \underline{e^{2x} \cdot (4a - 2x - 1)}$

$f_a''(x) = u(x) = 4a - 2x - 1 \qquad v(x) = e^{2x}$

$\qquad u'(x) = -2 \qquad v'(x) = 2e^{2x}$

PR : $\underline{e^{2x} \cdot (8a - 4x - 4)} = f_a''(x)$

Extrempunkte

$f_a'(x) = 0$

$0 = e^{2x} \cdot (4a - 2x - 1) \qquad e^{2x} \neq 0$

$0 = 4a - 2x - 1$

$\underline{x = 2a - \frac{1}{2}}$

x in 2. Ableitung

$f_a''(2a - \frac{1}{2}) = (8a - 4 \cdot (2a - \frac{1}{2}) - 4) \cdot e^{2x}$

$\qquad = e^{2x} \cdot (-2) < 0 = \underline{HP}$

y-koordinate

$f_a(2a - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} e^{4a-1} \qquad \underline{HP}\ (2a - \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2} e^{4a-1})$

Wendepunkte

$f_a''(0) = 0 \rightarrow 0 = e^{2x} \cdot (8a - 4x - 4) \qquad e^{2x} \neq 0$

$0 = 8a - 4x - 4 \rightarrow \underline{x = 2a - 1}$

VZW

$f_a''(2a - 2) = 4e^{2x} \quad ; \quad f_a''(2a) = -4 \cdot e^{2x}$

↳ von + nach − = WPgrSt

y-koordinate

$f_a(2a - 1) = -e^{4a-2}$

$\underline{WP}\ (2a - 1 \mid -e^{4a-2})$

✓

Lukas Foot 5

ÜBERSICHTSBLATT:

ORTSKURVEN

Was sind Ortskurven?
Ortskurven sind ein Hilfsmittel das man beim Umgang mit Funktionsscharen verwendet. Eine Ortskurve ist dabei eine Kurve, auf der alle Punkte einer Funktionsschar liegen, die eine Gewisse Eigenschaft erfüllen. Diese Eigenschaften können z. B. sein dass die erste Ableitung null ist. Somit würde die Ostkurve alle Extrema der Funktionsschar beinhalten.

Berechnung der Ortskurve für lokale Extrema:
Um die Ortskurve eine Funktionsschar zu berechnen, die alle lokalen Extrema der Schar aufweist, muss man den folgenden Aktionsplan anwenden:

- Zunächst ganz normal die Extremstellen der Kurvenschar bestimmen, mit der zweiten Ableitung prüfen und über die Ausgangsgleichung die Y-Koordinaten berechnen.
- Nun die X-Koordinate nach der Formvariablen (Schar-Variablen) umstellen.
- Dann die umgestellte X-Koordinate in die Y-Koordinate einsetzten und somit die Ortskurve für die Bestimmung von Y-Werten unabhängig von der Formvariablen herleiten.

Beispiel:
Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x) = x^2 + kx + 1$ für die wir die Ortskurve für lokale Extrema bestimmen sollen.

Nach dem oben beschriebenen Aktionsplan bilden wir zunächst die beiden ersten Ableitungen dieser Schar:

$$f'_k(x) = 2x + k$$
$$f''_k(x) = 2$$

Nun setzten wir die erste Ableitung gleich null und ermitteln damit die möglichen X-Werte der Extrempunkte:

$$0 = 2x + k \quad | -k$$
$$-k = 2x \quad | \div 2$$
$$-\frac{1}{2}k = x$$

Die zweite Ableitung an der Stelle $-\frac{1}{2}k$ ist auf jeden Fall größer als Null, daher ist diese Stelle als Extremstelle bestätigt. Wir setzten sie also in die Ausgangsgleichung ein um die Y-Koordinate zu ermitteln.

$$f_k\left(-\frac{1}{2}k\right) = \left(-\frac{1}{2}k\right)^2 + k \cdot \left(-\frac{1}{2}k\right) + 1$$
$$f_k\left(-\frac{1}{2}k\right) = -\frac{1}{4}k^2 + 1$$

Als Extrempunkt für die Kurvenschar ergibt sich somit: $P_E\left(-\frac{1}{2}k \middle| -\frac{1}{4}k^2 + 1\right)$

Um die allgemeine Ortskurve zu ermitteln, stellen wir nun die X-Koordinate nach der Formvariablen k um. Es ergibt sich die Gleichung $k = -2x$.

Diesen Term setzten wir jetzt für k in die Y-Koordinate des Extrempunktes ein. Wir erhalten:

$$y = -\frac{1}{4} \cdot (-2x)^2 + 1$$
$$y = -x^2 + 1$$

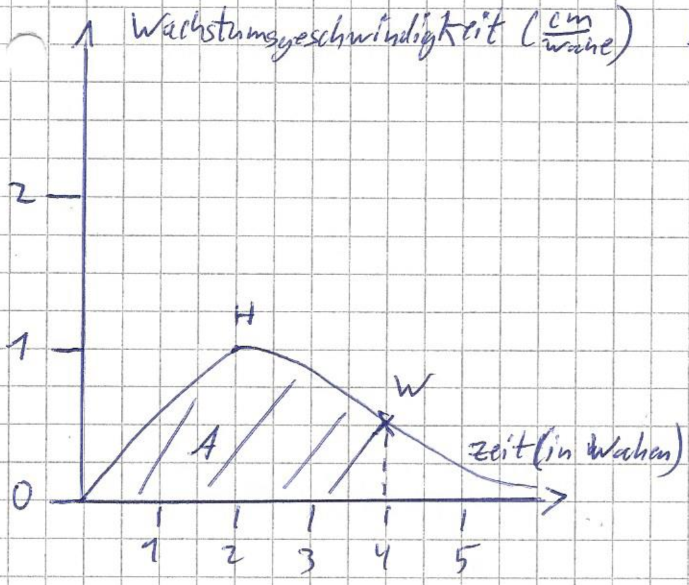
Die ist die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Extrempunkte dieser Funktionsschar liegen.

Berechnung der Ortskurve für Wendepunkte:
Um die Ortskurve eine Funktionsschar zu berechnen, die alle Wendepunkte der Schar aufweist, geht man im Grunde genauso vor, wie zuvor bei den Extremwerten:

- Zunächst ganz normal die Wendestellen der Kurvenschar bestimmen, mit der dritten Ableitung prüfen und über die Ausgangsgleichung die Y-Koordinaten berechnen.
- Nun die X-Koordinate nach der Formvariablen (Schar-Variablen) umstellen.
- Dann die umgestellte X-Koordinate in die Y-Koordinate einsetzten und somit die Ortskurve für die Bestimmung von Y-Werten unabhängig von der Formvariablen herleiten.

✓

Mathe LK: Wachstumsgeschwindigkeiten



Beispiel: Die Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes ist in Form einer Funktion f(t) oder in einem Diagramm als Graph gegeben

Um nun Fragestellungen zur Wachstumsgeschwindigkeit beantworten zu können muss man Merkmale der Funktion (oder des Graphens) zunächst in ihre mathemathische Bedeutung übersetzen.

[redacted] Merkmal im Graph	mathm. Bedeutung in Fragestellungen
• Hochpunkt (hier bei (2/1))	max. Wachstumsgeschwindigkeit (hier 1cm pro Woche zum Zeitpunkt 2 Wochen)
• Fläche A zwischen x-Achse, dem Graphen und einer beliebigen Gerade (hier x=4)	Wachstum in gewählter Zeit (hier in ersten 4 Wochen)
• Wendepunkt des Graphen (hier (4/0,5)	max. Abnahme der Wachstumsgeschwindigkeit

Für eine Funktion f, die die Wachstumsgeschwindigkeit eines Objekt (hier Baum) nach t (hier Wochen) beschreibt, so ergeben sich folgende Zusammenhänge

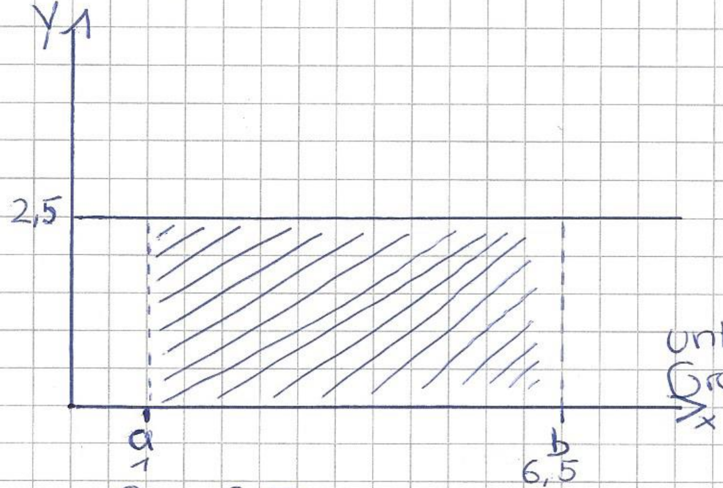
Fragestellung im Sachzusammenhang	Frage bei der Funktionsuntersuchung	Mögliche Rechenverfahren
• Wann wächst die Pflanze nicht?	Wo hat f Nullstellen?	Lösen von Gleichung f(x)=0
• [redacted]	[redacted]	
• Wann ist die Wachstumsg. am größten?	Wo erreicht f ihr Maximum	Bestimmung von HP, Verhalten an Definitionsrändern betrachten
• Wann nimmt die Wachstumsg. am stärksten ab?	Wo ist Minimum von Ableitung von f	Bestimmung von WPs, Verhalten an Definitionsrändern beachten
• Wieviel ist der Baum in den ersten 4 Wochen gewachsen?	Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse im Intervall [0;4]	Berechnung des Integralls $\int_0^4 f(t)\,dt$
Durchschnittliche Wachstumsg. in ersten 4 Wochen?	Mittelwert von f im Intervall [0;4]	Berechnung Mittelwert mit Integrals $\frac{1}{4}\cdot\int_0^4 f(t)dt$

Robin H.

Flächenbestimmung zwischen:

x-Achse und einer Funktion, Integral der Funktion

→ Stammfunktion bilden



$[a;b]$ ← Intervall

untere Grenze

obere Grenze

$f(x) = 2,5$

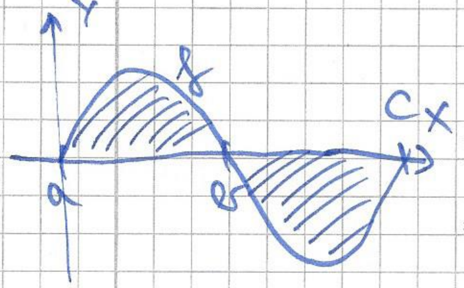
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b 2,5\,dx$$

$$= \Big[2,5x\Big]_a^b$$

$$= 2,5 \cdot b - 2,5 \cdot a$$

$$= 2,5 \cdot 6,5 - 2,5$$

$$= 13,75$$



unbegrenzte Integrale

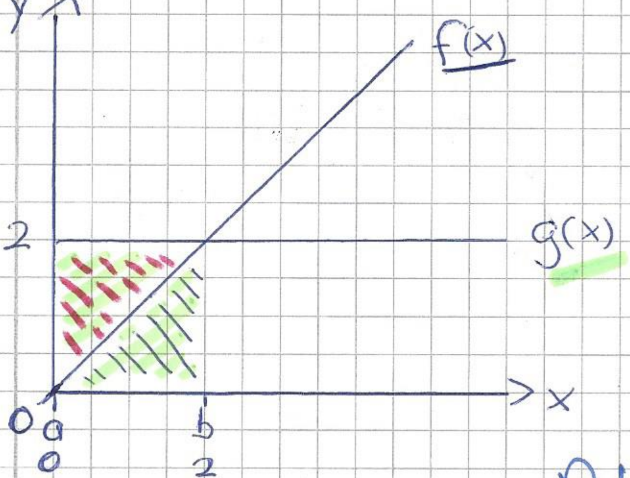
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{c \xrightarrow{\lim} \infty} f(x)\,dx$$

$$= \Big[2,5x\Big]_a^c$$

$$= \infty$$

Achtung: liegen mehr als 2 Nullstellen vor, muss von Nullstelle zu Nullstelle integriert werden: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|\int_b f(x)\,dx\right|$

zwei Funktionen:



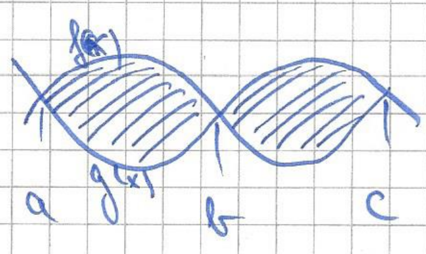
$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= \Big[2x\Big]_0^2 - \Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^2$$

$$= (2 \cdot 2 - 2 \cdot 0) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 2^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2\right)$$

$$= 4 - 2$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

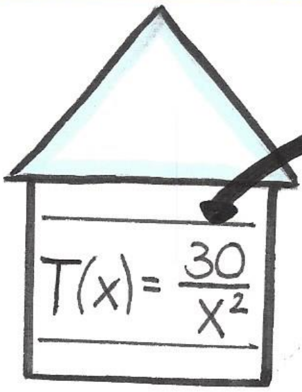


Achtung: liegen mehr als 2 Schnittpunkte vor, muss von Nullstelle zu Nullstelle integriert werden:

$$\left|\int_a^b f(x)-g(x)\,dx\right| + \left|\int_b (f(x)-g(x))\,dx\right|$$

Mittelwerte von Funktionen

Mittelwert



Funktion der Raumtemperatur

Frage: Wie groß ist die Durchschnittstemperatur von 1 - 10 Uhr?

$$\boxed{m = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$

Rechnung:

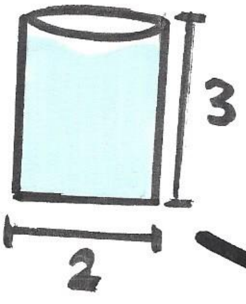
$f(x) = \frac{30}{x^2}$ $\quad a = 1 \quad b = 10$

$$m = \frac{\int_1^{10} \frac{30}{x^2}\,dx}{10-1} = \underline{\underline{3\,°C}} \rightarrow \text{Durchschnittstemperatur}$$

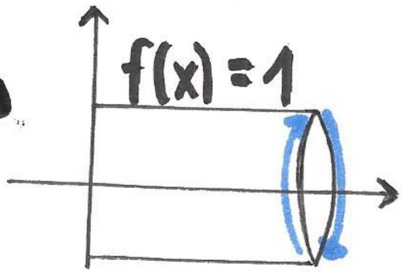
Rotationskörper

=> Lässt man den Graphen einer Funktion f im Bereich $[a; b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein Rotationskörper

Bsp: Wie viel passt in das Glas?



$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx}$$



Die Funktion $f(x) = 1$ dreht sich um die x-Achse mit dem Abstand 1.
Dabei ist die x-Achse die Mittellinie die durch das Glas geht.

Rechnung:

$a = 0 \quad b = 3$

$f(x) = 1$

$$V = \pi \int_a^b (1)^2\,dx = 3\pi$$

Umrechnung zwischen Parameterform, Koordinatenform und Normalenform

Freitag, 17. Januar 2020 07:45

9

Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{s} + u\cdot\vec{r_1} + v\cdot\vec{r_2}$$

KF → PF

1. Punkt S suchen, der in der Ebene liegt $S = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ oder $s = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

2. Suche zwei Vektoren, die senkrecht zu $\vec{n}$ liegen $\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}\\\\\end{pmatrix} = 0$ ausprobieren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

PF → NF

$$\vec{n} = \vec{r_1}\times\vec{r_2}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$n = \begin{pmatrix}2\cdot(-1)-1\cdot1\\1\cdot1-3\cdot(-1)\\3\cdot1-2\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-1\\1+3\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} = \vec{n}$$

Normalenform

$$(\vec{x}-\vec{s})\cdot\vec{n} = 0$$

$$\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform

$$\vec{x}\cdot\vec{n} = \vec{s}\cdot\vec{n}$$

$$x_1\cdot n_1 + x_2\cdot n_2 + x_3\cdot n_3 = \vec{s}\cdot\vec{n}$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

NF → KF

$$\vec{s}\cdot\vec{n}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix} = 1\cdot(-3)+2\cdot8+3\cdot1 = 8$$

ABSTANDSPROBLEM Punkt . Ebene

Viola

1.) Punkte und Ebenen bei vorgegebenem Abstand:

a) Einen Punkt P bestimmen, der von der Ebene E einen vorgegebenen Abstand d hat:

1. einen Punkt Q auf der Ebene E wählen
2. Ortsvektor $\vec{p}$ des gesuchten Punktes P bestimmen:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{q} + d \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{q} + d \cdot \vec{n_0}}$$

mit $\vec{n}$: Normalenvektor von E
$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$: Einheitsvektor
$\vec{q}$: Ortsvektor von Q

b) Zwei parallele Ebenen E_1 und E_2 bestimmen, die von einer gegebenen Ebene E einen gegebenen Abstand d haben:

1. Einen Punkt P_1 bestimmen wie in a) beschrieben
2. Einen zweiten, gegenüberliegenden Punkt P_2 bestimmen:

$$\boxed{\vec{p_2} = \vec{q} - d \cdot \vec{n_0}}$$

3. Ebenengleichungen E_1 und E_2 aufstellen, die parallel zu E sind und durch P_1 bzw. P_2 verlaufen

2.) Abstand Punkt Ebene mit Hessischer Normalenform für Ebenen in Normalenform:

Den Abstand d zwischen einer Ebene E in Normalenform und einem Punkt R bestimmen

$$\boxed{d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}|}$$

mit $\vec{p}$: Stützvektor für einen bestimmten Punkt P der Ebene E
$\vec{r}$: Ortsvektor des Punktes R
$\vec{n}$: Normalenvektor der Ebene E
$\vec{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$: Einheitsvektor des Normalenvektors

3.) Abstand Punkt Ebene mit Hessischer Normalenform für Ebenen in Koordinatenform:

Den Abstand d zwischen einer Ebene E in Koordinatenform und einem Punkt R bestimmen

$$\boxed{d = \left| \frac{r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2 + r_3 \cdot n_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|}$$

wenn E die Form $\boxed{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 = b}$

und R die Koordinaten $\boxed{(r_1 | r_2 | r_3)}$ hat

✓ Viola gut!

Jule (11)

Abstandsproblem (Punkt, Gerade)

= kleinste Entfernung von Punkt R zur Geraden g

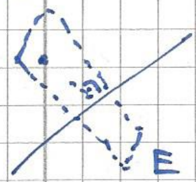
-> 2 Möglichkeiten bei der Berechnung:

1. Möglichkeit: Hilfsebene

1.) Hilfsebene H aufstellen

$H: 0 = \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p})$ $\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad P(1|2|5)$

$\vec{n}$ $\qquad \vec{p}$



$E: \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ -> Koordinatenform

2.) H mit g schneiden

$0 = x_3 - 4x_2 + 3x_1$ -> Ebene & Gerade schneiden (S ausrechnen)

$s = 1 \rightarrow S(5|5|5)$

3.) $\vec{SP}$ aufstellen, Länge ausrechnen

$|\vec{SP}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 3 + 0^2} = \underline{\underline{5}}$ -> Abstand

---

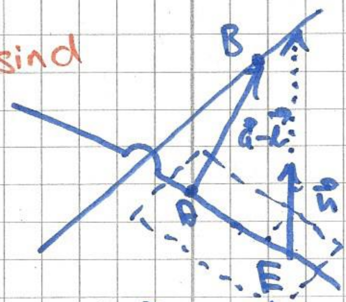
Abstandsproblem (windschiefer Geraden)

= kleinste Entfernung zwischen den Punkten von g und den Punkten von h

-> windschief = nicht parallel, schneiden sich nicht

1. Möglichkeit: Hilfsebene

1.) Prüfen, ob Richtungsvektoren nicht parallel sind



2.) Normalenvektor berechnen (Kreuzprodukt)

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{r}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b} + t_1 \cdot \vec{s}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

oder: Ebene E: $\vec{a} + t_1 \cdot \vec{r} + t_2 \cdot \vec{s}$ -> d = Abstand d(B, E)

3.) In Abstandsformel einsetzen $\left(d = \frac{|(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \right)$

Formelsammlung S. 78

$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \underline{\underline{\frac{5}{\sqrt{3}}}}$ -> Abstand

2. Möglichkeit:

$\vec{OP} = \vec{a} + t_1 \cdot \vec{r}$

$\vec{OQ} = \vec{b} + t_2 \cdot \vec{s}$

$\vec{d} = \vec{OP} - \vec{OQ} = \vec{a} - \vec{b} + t_1 \cdot \vec{r} - t_2 \cdot \vec{s}$

$\vec{d} \perp \vec{r}$ und $\vec{d} \perp \vec{s}$ ⇒

Wenn Punkte PQ mit kürzester Richtung gesucht sind. 2 Gleich. -> t_1 + t_2 bestimmen

Hannes Maus

Orthogonalität und Schnittwinkel

(12)

1. Orthogonalität

Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \dots}$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot a_2 \dots$

Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$

- Vektor-Vektor: Orthogonal, wenn gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ z.B

- Gerade-Gerade: Orthogonal zu einander, wenn für beide Richtungsvektoren $\vec{r_1} \cdot \vec{r_2} = 0$ gilt

  z.B $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = 2 + 24 - 26 = 0$

- Ebene-Ebene: Orthogonal zu einander, wenn für beide Normalenvektoren $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$ gilt.

  z.B $E_1: 2x - 4z = 7$

  $E_2: 8x + 11y + 4z = 0$

  $\Rightarrow 16 + 0 - 16 = 0$

- Gerade-Ebene: Orthogonal zu einander, wenn der Richtungsvektor der Geraden parallel zum Normalenvektor der Ebene verläuft. ($\vec{n} = h \cdot \vec{r}$)

  z.B $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \\ 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{/12} \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow$ ggf. LGS nötig

2. Schnittwinkel

- Vektor-Vektor: Der Schnittwinkel zweier Vektoren ergibt sich aus $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

  z.B $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

  $\cos(\alpha) = \frac{44}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{56}} = 0{,}993$

  $\cos^{-1}(0{,}993) = 6{,}353^\circ$

- Gerade-Gerade: Der Schnittwinkel zweier Geraden ergibt sich aus dem Schnittwinkel der Richtungsvektoren $\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{|\vec{r_1} \cdot \vec{r_2}|}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}$

- Ebene-Ebene: Der Schnittwinkel zweier Ebenen ergibt sich aus dem Schnittwinkel der Normalenvektoren

  $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

  z.B $E_1: 2x - 4z = 7$

  $E_2: 8x + 11y + 4z = 0$

  $\Rightarrow \cos(\alpha) = 0$

  $\Rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ$

- Gerade-Ebene: Der Schnittwinkel ergibt sich aus dem Schnittwinkel des Richtungsvektors der Gerade mit der Ebene. Dazu wird der Komplementärwinkel des Schnittwinkels zwischen Normalenvektor der Ebene und Richtungsvektor der Gerade genutzt!

  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|}$

  z.B $E_1: 2x - 4z = 7$

  $g: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

  $\sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{89}} = 0{,}211$

  $\sin^{-1}(0{,}211) = 12{,}239^\circ$

✓

SPURPUNKTE & SPURGERADEN:

Darleen

13

Spurpunkte = Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen ($x_1; x_2; x_3$)
↳ bei einem Spurpunkt sind zwei Koordinaten $= 0$

Spurgeraden = Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen (x_1-x_2; x_2-x_3; x_1-x_3)
↳ für alle Punkte der Spurgeraden ist eine Koordinate $= 0$

Variante 1 = Geradengleichung durch 2 SP

Variante 2 = rechnerisch bestimmen; eine Koordinate immer 0

FALL ① = Alle auftretenden Zahlen der E-Glg. $\neq 0$

z.B. $E: x_1 + x_2 + x_3 = 8$

1. $x_1; x_2 = 0$ $SP_1(0|0|8)$
2. $x_2; x_3 = 0$ $SP_2(8|0|0)$
3. $x_1; x_3 = 0$ $SP_3(0|8|0)$

Variante 1:

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ $x_2 = 0$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = 0$

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$ $x_1 = 0$

Variante 2: nicht nötig

FALL ② = Eine Koordinate der E-Glg. $= 0$

z.B. $E: 2x_1 + 6x_2 = 12$

1. $x_1; x_2 = 0$ ↯
2. $x_2; x_3 = 0$ $SP_1(6|0|0)$
3. $x_1; x_3 = 0$ $SP_2(0|2|0)$

↳ Ebene liegt parallel zur x_3-Achse

Variante 1:

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_3 = 0$

Variante 2:

$x_1 = 0$ $x_2 = 2$ also $x_3 = t$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$ $x_1 = 6$ $x_3 = t$

$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

FALL ③ = Zwei Koordinaten der E-Glg. $= 0$

z.B. $E: x_1 = 5$

1. $x_1; x_2 = 0$ ↯
2. $x_2; x_3 = 0$ $SP_1(5|0|0)$
3. $x_1; x_3 = 0$ ↯

↳ Ebene liegt parallel zur x_2-x_3-Ebene

Variante 1: nicht möglich, weil es nur einen SP gibt

Variante 2:

$x_2 = 0$ $x_1 = 5$ $x_3 = t$

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

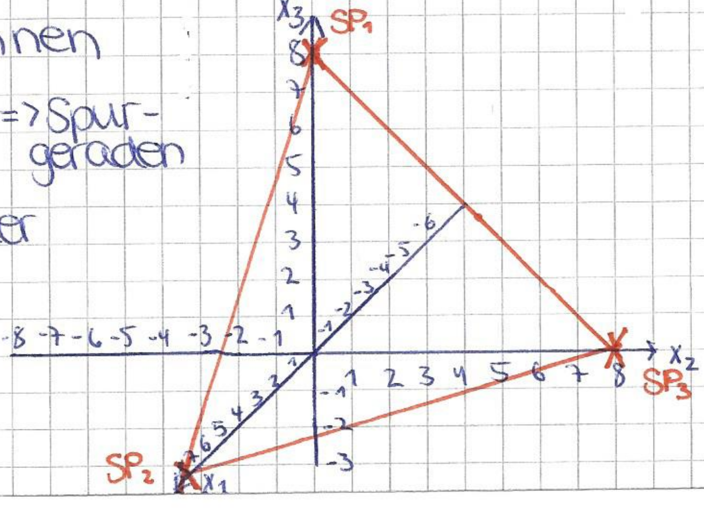
$x_3 = 0$ $x_1 = 5$ $x_2 = t$

$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

↳ nur 2 Spurgeraden möglich

Ebenen einzeichnen z.B. $E: x_1 + x_2 + x_3 = 8$ (Fall 1)

1) SP einzeichnen
2) verbinden => Spurgeraden
3) Dreieck ist Teil der Ebene



gut!

Schnitte zwischen Gerade und Ebene

(Kannliste Geometrie 1 (Vektoren und Ebenen), Nr. 17)

Erklärung

Es gibt 3 Möglichkeiten der gegenseitigen Lage:

1. Die Gerade liegt innerhalb der Ebene
   ↳ Dies ist der Fall, wenn ein Parameter bestehen bleibt
2. Die Gerade liegt parallel zur Ebene ohne Schnittpunkt
   ↳ Dies ist der Fall, wenn keine Lösung gefunden werden kann
3. Die Gerade schneidet die Ebene
   ↳ Dies ist der Fall, wenn jeder Parameter bestimmt werden kann

Beispiel

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}$ $\quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

1. Schritt -> Gleichsetzen; 2. Schritt -> Umstellen; 3. Schritt -> Auflösen

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} \Big| - t \begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot r + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-7\\-8\\-6\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ -1 & 0 & -8 & -3 \end{array}\right) \; III + I \qquad \begin{array}{rccc|c} & -1 & 0 & -8 & -3 \\ \oplus & 1 & 3 & -6 & 1 \\ \hline & 0 & 3 & -14 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 3 & -14 & -2 \end{array}\right) \; III - II \cdot 3 \qquad \begin{array}{rcc|c} & 3 & -14 & 2 \\ \ominus & 3 & -21 & -9 \\ \hline & 0 & 7 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 7t = 7 \rightarrow t = 1 \\ s - 7 \cdot r = -3 \rightarrow s = 4 \\ r + 3 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 1 \rightarrow r = (-5) \end{array}$$

-> Schnittpunkt bestimmen:
Einsetzen in die Ebenengleichung oder Geradengleichung

Schnittpunkt = $S(5|9|10)$

Schnitte zwischen 2 Ebenen

(Kannliste Geometrie 1, Nr. 18)

Erklärung:

mögliche Fälle:

1. Ebenen sind identisch
   ↳ Dies ist der Fall, wenn 2 Parameter bestehen bleiben
2. Ebenen liegen parallel zueinander ohne Schnittpunkt
   ↳ Dies ist der Fall, wenn keine Lösung gefunden werden kann
3. Die Ebenen schneiden sich, es gibt eine Schnittgerade
   ↳ ist der Fall, wenn ein Parameter bestehen bleibt

Beispiel:

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} r & s & u & v \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{GTR} \quad \begin{bmatrix} v = t \\ u = 1 - t \\ s = 4 - t \\ r = -3 + 3t \end{bmatrix}$$

Schnittgerade aufstellen:

In eine Ebene die Lösung einsetzen:

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + (1-t) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1-t\\1-t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2t\\0\\t\end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2t\\1-t\\1\end{pmatrix}$$

Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen für Stichproben und Wahrscheinlichkeitsverteilungen (15)

Milena

Erwartungswert: Das Ergebnis, was man langfristig erwartet

Standardabweichung: gibt an, wie sehr die Werte um den Erwartungswert schwanken

Bsp. Stichproben

10 x würfeln

Zahl	1	2	3	4	5	6
wie oft gewürfelt	2	1	3	2	2	0

Erwartungswert

$$\mu = \frac{(1\cdot 2) + (2\cdot 1) + (3\cdot 3) + (4\cdot 2) + (5\cdot 2) + (6\cdot 0)}{10}$$

$$= 3{,}1$$

Standardabweichung

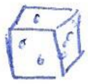
$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-3{,}1)^2 + (1-3{,}1)^2 + (2-3{,}1)^2 + (3-3{,}1)^2 + (3-3{,}1)^2 + (3-3{,}1)^2 + (4-3{,}1)^2 + (4-3{,}1)^2}{10} + (5-3{,}1)^2 + (5-3{,}1)^2 +}$$

$$= 1{,}37$$

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots\ x_n}{n}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + (x_n-\mu)^2}{n}}$$

Bsp. Wahrscheinlichkeitsverteilungen



Zahl	1	2	3	4	5	6
Wahrsch.	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6}$$

$$= 3{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{(1-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2\cdot\frac{1}{6}}$$

$$= 1{,}375$$

$$\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2-\mu)^2 \cdot P(X = x_2) \ldots}$$

Milena

Aufgaben zur Binomialverteilung

14.01.20

16

Alina

- **$P(X \leq r)$, $P(X \geq r)$ oder $P(X = r)$ gesucht:**

$$P(X=r) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

(GTR: Menü → Statistik → Dist → Binomial → Bpd ($x = r$) → Bcd ($x \leq r$ / $x \geq r$))

n = Zahl der Versuche, Personen, Fragen, etc.
k = Zahl der Richtigen, betroffenen, etc.
p = Wahrscheinlichkeit für Richtige
q = Wahrscheinlichkeit für Falsche ($1-p$)

Bsp.: → Multiple-Choice-Test:
- jeweils 4 Antworten, genau eine Antwort jeweils richtig
- 5 Fragen insgesamt

→ Frage: Wahrscheinlichkeit, dass man zufällig genau 3 Fragen richtig beantwortet

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Zahl der Fragen: $n = 5$
Zahl der Richtigen: $k = 3$
(Einzelwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$; $q = 1 - p = \frac{3}{4}$

$$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot \frac{1}{4}^{3} \cdot \frac{3}{4}^{5-3}$$

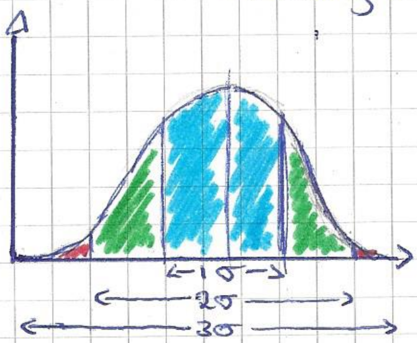
$$P(X=3) = 10 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{9}{16}$$

$$= \frac{45}{512} \approx 0{,}08789 \approx \underline{8{,}789\ \%}$$

- **Sigmaregeln:**

→ für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern n & p + $\mu = n \cdot p$ & $\sigma = \sqrt{n \cdot p\,(1-p)}$

→ Achtung: nur Näherungswerte; dürfen benutzt werden, wenn $\sigma \geq 3$



1. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$
2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$
3. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$
4. $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$
5. $P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$
6. $P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\%$

- **n gesucht:**

→ Bsp.: $P(X \geq 4) \geq 0{,}9$ $p = 0{,}05$ $n = ?$

GTR:
> Table-Menü (7)
> Shift 4 (Catalog)
- BinomialCD (r, n, p) = $P(X \leq r)$
- BinomialPD (r, n, p) = $P(X = r)$

$P(X \geq 4) \geq 0{,}9$

Gegenwahrsch. → $1 - P(X \leq 3) \geq 0{,}9$ $| + P(X \leq 3)$

$1 \geq 0{,}9 + P(X \leq 3)$ $| - 0{,}9$

$0{,}1 \geq P(X \leq 3)$

$P(X \leq 3) \leq 0{,}1$

> Tabel-Menü: 1 − BinomialCD (3, X, 0,05)

→ bei 132 = 0,9

↳ $\underline{n = 132}$

- **p gesucht:**

→ Bsp.: $P(X \geq 98) \leq 0{,}02$ $n = 102$ $p = ?$

GTR:
> Grafik-Menü (5)
> BinomialCD
> BinomialPD
> Graph (F6)
> V-Window (F4)
> Trace ($Y = 0{,}98$ → mit Kreuz x ablesen)

$P(X \geq 98) \leq 0{,}02$ $| + P(X \leq 97)$

$1 \leq 0{,}02 + P(X \leq 97)$ $| - 0{,}02$

$0{,}98 \leq P(X \leq 97)$ ✓

BinomialCD (97, 102, X)

- $P(X \leq 97) = 0{,}983$ → $x = 0{,}897$
- $P(X \leq 97) = 0{,}971$ → $x = 0{,}904$

$x = 0{,}897$ → $\underline{89{,}7\% = p}$

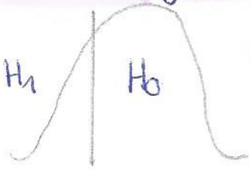
Einseitiger Signifikanztest

Beispiel:

„Die Autofarbe Weiß wird in Deutschland immer beliebter". So lautet die Schlagzeile der aktuellen Ausgabe einer Autozeitschrift, nach dem man in den vergangenen Jahren von einem Marktanteil von 20% für weiße Autos ausgegangen war. Ein Autohändler vermutet deshalb, dass Autos weißer Farbe zahlreicher geworden sind. Bevor er verstärkt weiße Gebrauchtwagen ankauft, möchte er durch einen Test sicherstellen, dass die Aussage der Autozeitschrift richtig ist. Zu diesem Zweck ermittelt er an einer Hauptverkehrsstraße, wie viele von 100 vorbeifahrenden Pkws (mit deutschem Kennzeichen) weiß sind. Er möchte auf keinen Fall weiße Autos kaufen, wenn er diese eventuell nicht loswerden kann.

Beim Hypothesentest möchte man verhindern, dass man sich für die Alternativhypothese (H_1) entscheidet, obwohl die Nullhypothese (H_0) richtig ist. Im Beispiel: $H_0: (p \leq 0{,}2)$ $H_1: (p > 0{,}2)$

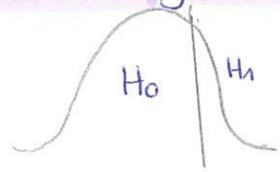
Linksseitiger Test:



$H_0: p = p_0$ oder $p \geq p_0$
$H_1: p < p_0$

H_1 liegt links von H_0 und dem Erwartungswert

Rechtsseitiger Test:



$H_0: p = p_0$ oder $p \leq p_0$
$H_1: p > p_0$

H_1 liegt rechts von H_0 und dem Erwartungswert

Bei einem linksseitigen Test bestimmt man den Ablehnungsbereich der Nullhypothese $Abl_{H_0} = [0;k] = Ann_{H_1}$. Suche mit BinomialCD (X,n,p) die größte Zahl k, sodass gilt:

$$\alpha = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) = \boxed{p(X \leq k) \leq 5\%}$$

Bei einem rechtsseitigen Test bestimmt man den Ablehnungsbereich der Nullhypothese $Abl_{H_0} = [k+1;n] = Ann_{H_1}$. Suche die kleinste Zahl k, sodass gilt:

$$\alpha = P_{H_0}(\text{Entscheidung für } H_1) = p(X > k) \leq 5\% \qquad | + p(X \leq k)$$

Umrechnung: $1 = p(X \leq k) + p(X > k) \leq 0{,}05 + p(X \leq k)$

Suche k mit: $\boxed{p(X \leq k) \geq 0{,}95}$

Beispiel oben: $n = 100$ $p = 0{,}2$ $H_0: p \leq 20\%$ $H_1: p > 20\%$

$p(X > k) \leq 5\%$
$p(\leq k) \geq 0{,}95$
$p(X \leq 27) = 0{,}9658 > 0{,}95$
$k = 27$
$p(X > 27) \leq 5\%$ $Abl._{H_0} = [28;100]$ $Ann._{H_0} = [0;27]$

Zweiseitiger Signifikanztest

Lara

Allgemein: 1.) Nullhypothese H_0 aufstellen
2.) Angaben wie Stichprobe (n) und Irrtumswahrscheinlichkeit (α) notieren
3.) einen links- und -rechtsseitigen Test durchführen

1. P_{H_0}(Entsch. für H_1) = $P(x \leq a) \leq 2,5\,\%$ ist Annahme von H_1 also Ablehnung von H_0
An_{H_0}: $[a+1; b]$ Abl_{H_0} $[0; a]$ An_{H_1} $[0; a]$

2. P_{H_0}(Entsch. für H_1) = $P(x > b) \leq 2,5\,\%$ ist Annahme von H_1 also Ablehnung von H_0
$P(x > b) \leq 2,5\,\%$ $\quad | + p(x \leq b)$
$1 \leq 0,025 + p(x \leq b)$ $\quad | - 0,025$
$p(x \leq b) \geq 0,975$
$Abl_{H_0} = [b+1; n]$ $\qquad An_{H_1} = [b+1; n]$
$An_{H_0} = [0; b]$ $\qquad Abl_{H_1} = [0; b]$

Beispiel: Eine Kugelschreiberfirma behauptet: 80 % ihrer Kugelschreiber funktionieren. Die Gruppe „Beidseitiger Test" behauptet, es stimmt nicht

$H_0: p = 0,8$ $\quad H_1: p \neq 0,8$ $\quad n = 100$ $\quad \alpha = 5\,\%$

Linksseitiger Test: $P(x \leq a) \leq 2,5\,\%$ $\quad BCD(x; 100; 0,8)$
$a = 71$

Rechtsseitiger Test: $P(x \leq b) \geq 0,975$
$P(x \leq 88) = 0,987$ $\quad b = 88$

$\Rightarrow An_{H_0} = [72; 88]$

Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert, Standardabweichung

Janine Schulz

1. Wahrscheinlichkeitsdichte

Eine Funktion f heißt Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Intervall I, z.B. $I=[a;b]$, wenn gilt:

1) $f(x) \geq 0$ für alle x aus I

← Bedingungen der Teilintervalle dürfen nicht negativ sein

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

↑ Wahrscheinlichkeit des gesamten Intervalls beträgt 100%.

2. Erwartungswert

$$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$

3. Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx}$$

Beispiel S.329 nr.6

$f(x) = 3(x-1)^2$ über $[0;1]$

a) $f(0) = 3(0-1)^2 = 3$
$f(1) = 3(1-1)^2 = 0$
} beide Teilintervalle sind positiv (Bedingung 1)

$\int_0^1 3(x-1)^2\,dx = 1$ } Wahrscheinlichkeit beträgt 100%. (Bedingung 2)

b) weniger als 0,1 m

$\int_0^{0,1} 3(x-1)^2\,dx = 0,271$

c)

$\mu = \int_0^1 x \cdot 3 \cdot (x-1)^2\,dx = \frac{1}{4}$

$\sigma = \sqrt{\int_0^1 (x-\frac{1}{4})^2 \cdot 3 \cdot (x-1)^2\,dx} \approx 0,1936$

Normalverteilungen

$\mu = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$

$\sigma = \sqrt{\int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx}$

Stetige Zufallsgrößen

↳ werden ohne die Stetigkeitskorrektur gerechnet

Bsp.: Das Gewicht X (in Gramm) lässt sich durch eine Normalverteilung mit $\mu = 54$ und $\sigma 2$ beschreiben.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass...

a) ... ein Brötchen mindestens 56g wiegt?

b) ... ein Brötchen mindestens 52g und höchstens 54g wiegt?

a) $P(56 \leq X)$ $\int_{56}^{\infty} \varphi_{54;2}(x) \cdot dx \approx 15,87\%$

TR: Ncd

b) $P(52 \leq X \leq 54)$ $\int_{52}^{54} \varphi_{54;2}(x)\, dx \approx 34,13\%$

Ganzzahlige Zufallsgrößen

↳ werden mit der Stetigkeitskorrektur gerechnet (aufgrund ganzer Zahlen)

Bsp.: Die Anzahl Z der Rosinen im Brötchen lässt sich näherungsweise durch eine Normalverteilung mit $\mu = 14,2$ und $\sigma = 3,5$ beschreiben.

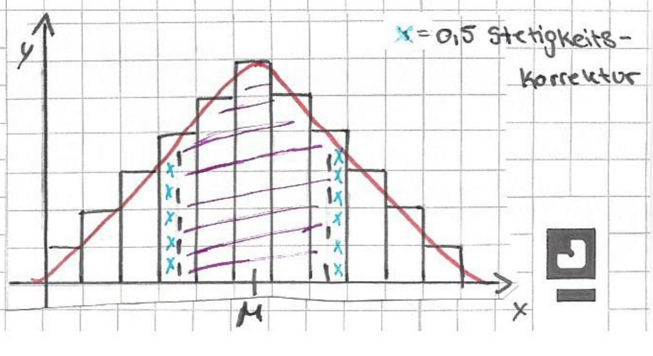
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgesuchtes Brötchen...

a) ... 14 Rosinen enthält?

b) ... mindestens 12 und höchstens 16 Rosinen enthält?

a) $\int_{13,5}^{14,5} \varphi_{14,2;3,5}(x)\, dx \approx 11\%$ (TR: Npd)

b) $\int_{11,5}^{16,5} \varphi_{14,2;3,5}(x)\, dx \approx 52\%$ (TR: Ncd)



Das Gaußverfahren ist ein Verfahren zur Bestimmung von Lösungen linearer Gleichungssysteme. Ziel des Verfahren ist es ein Gleichungssysem so umzuformen, das es eine Dreiecksgestallt hat.

Beispiel:

I $5x - 4y + z = -3$
II $2x + y - 3z = 10$
III $3x - y - z = 4$

Matrix

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

Erste Zeile bleibt erhalten

▶ addiere das Vielfache einer Zeile (Gleichung) zu dem Vielfachen einer anderen Zeile

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & -17 & 56 \\ 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad \text{I} \cdot (-2) + \text{II} \cdot 5$$

→ Äquivalenzumformung

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & -17 & 56 \\ 0 & 7 & -8 & 29 \end{array}\right) \quad -\text{I} \cdot 3 + \text{III} \cdot 5$$

Lösbarkeit

2. Letzte Zeile $= (0\ 0\ 0 \mid r)\ (r \neq 0)$
Das LGS ist unlösbar

$$\begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & -17 & 56 \\ 0 & 0 & 15 & -15 \end{array}\right) \quad 13 \cdot \text{III} - 7 \cdot \text{II}$$

Dreiecksgestalt

▶ LGS wird durch Rückwärtseinsetzen gelöst → $\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ (2 \mid 3 \mid -1) \end{array}$

1. Eindeutige Lösung

3. Letzte Zeile $= (0\ 0\ 0 \mid 0)$
Das LGS hat unendlich viele Lösungen
→ Mann setzt ein Parameter →

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = t \qquad 2x_2 + x_3 = 1 \qquad 2x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$

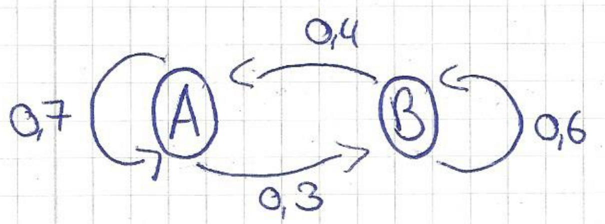
$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \qquad 5x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \qquad 5x_1 = 4x_2 - x_3 - 3 = \ldots$

Niklas Witthaut

Stabile Verteilungen bestimmen

Bei verschiedenen Austauschprozessen bleibt die Verteilung nach einer bestimmten Zahl von z.B. Jahren dauerhaft gleich. Diese Verteilung wird als stabile Verteilung oder Grenzverteilung bezeichnet.

Beispiel:



$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7x_1 & 0,4x_2 \\ 0,3x_1 & 0,6x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

2. Schritt: LGS erstellen und lösen

$$0,7x_1 + 0,4x_2 - x_1 = 0$$
$$0,3x_1 + 0,4x_2 - x_2 = 0$$

vereinfachen

$$-0,3x_1 + 0,4x_2 = 0$$
$$0,3x_1 - 0,6x_2 = 0$$

GTR: $x_1 = \frac{4}{3}t$

$x_2 = t$

Falls Grenzmatrix gesucht ist:

$x_1 + x_2 = 1$

$\frac{4}{3}t + t = 1$

$\frac{7}{3}t = 1 \qquad t = \frac{3}{7}$

$x_1 = 4/7 \quad x_2 = 3/7$

$G = \begin{pmatrix} 4/7 & 4/7 \\ 3/7 & 3/7 \end{pmatrix}$

3. Schritt: Parameter (t) bestimmen und in x_1/x_2 einsetzen

$x_1 + x_2 = 200$

$\frac{4}{3}t + t = 200$

$\frac{7}{3}t = 200 \quad | : \frac{7}{3}$

$t = \frac{600}{7}$

$x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{600}{7} = \frac{800}{7}$

$x_2 = \frac{600}{7}$

$$\boxed{\vec{g} = \begin{pmatrix} 800/7 \\ 600/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114,29 \\ 85,71 \end{pmatrix}}$$